

Fibres photoniques à coeur plein et optique non-linéaire

Aurélien Chanudet

19 mars 2003

1 Introduction

Alors que le concept de cristal photonique est apparu en 1987, son application au domaine des fibres optiques ne date que de 1996, avec la première démonstration de guidage optique dans une fibre à trous. Fabriquées dans un matériau constitutif tel que la silice, ces fibres comportent des canaux d'air microscopiques sur toute leur longueur, disposés de manière périodique autour d'un coeur plein ou creux.

Les fibres à coeur plein, à laquelle nous limitons notre étude, présentent de nombreuses analogies avec les fibres à saut d'indice standard utilisées en télécommunications. L'agencement périodique des canaux d'air forme en quelque sorte une gaine d'indice effectif inférieur à l'indice du matériau constitutif. Le mécanisme de guidage de la lumière peut alors être comparé au phénomène de réflexion interne totale qui intervient à l'interface coeur-gaine d'une fibre à saut d'indice. Le confinement de la lumière dans une fibre photonique à coeur plein est toutefois beaucoup plus fort que dans une fibre à saut d'indice et cela augure d'importants effets non-linéaires, tel notamment l'effet Kerr.

Dans les fibres à coeur creux, l'indice de coeur est cette fois inférieur à l'indice effectif de la gaine, ce qui rend impossible toute comparaison avec le phénomène de réflexion interne totale. Le mécanisme de guidage de la lumière repose dans ce cas sur l'existence de bandes photoniques interdites. Concrètement, il existe de plages de fréquences pour lesquelles la propagation de la lumière est impossible dans la gaine, mais autorisée dans le coeur, ce qui assure donc le guidage de certaines longueurs d'onde.

L'étude dont nous présentons ici les principaux résultats porte sur une fibre photonique fortement dispersive et fortement non-linéaire dont nous cherchons à prévoir le comportement. L'étude des fibres photoniques nécessite l'utilisation d'un outil de calcul permettant de simuler numériquement la propagation de la lumière. Plusieurs outils existent [1] [2]. Notre choix s'est porté sur MPB, un programme développé au MIT et initialement conçu pour l'étude générale des cristaux photoniques.

2 Rappels d'électromagnétisme

2.1 Equation aux valeurs propres et fonctions de Bloch

Nous nous limitons ici à des fibres photoniques réalisées dans un matériau non magnétique, dépourvu de charges libres et de courants, et invariantes par translation selon z , où Oz désigne l'axe de la fibre. Le tenseur diélectrique $\varepsilon(\vec{r})$ est donc uniquement fonction des coordonnées transverses : $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(x, y)$. Pour une raison qui apparaîtra ultérieurement, nous le supposons à symétrie hermitienne (si ε est scalaire, cela signifie que $\varepsilon^* = \varepsilon$, autrement dit, que ε est purement réel). Par ailleurs, nous ne considérons que des champs de fréquence ω définie, la dépendance

temporelle étant choisie de la forme $e^{-i\omega t}$; nous lèverons cette restriction ultérieurement, lorsque nous étudierons la propagation d'une onde quasi-monochromatique. Dans ces conditions, le champ magnétique \vec{H} peut s'écrire : $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{H}}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$.

L'équation des ondes dont le champ magnétique est solution peut s'interpréter comme une équations aux valeurs propres, moyennant l'introduction d'un opérateur $\hat{\Theta}$ [4] :

$$\hat{\Theta}\vec{\mathcal{H}}_\omega = \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}}_\omega \right] = (\omega/c)^2 \vec{\mathcal{H}}_\omega \quad (1)$$

Dans un cristal photonique (MPB est initialement conçu pour l'étude de ces cristaux), le théorème de Bloch s'applique en raison de la périodicité du réseau ([8] p. 305). Ce théorème s'énonce de la sorte : les fonctions propres $\vec{\mathcal{H}}_\omega$ (que nous appelons par abus de langage les modes propres) de l'équation des ondes peuvent s'écrire comme produit d'une onde plane $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ et d'une fonction $\vec{H}_{\vec{k}}$ ayant la périodicité du réseau. En particulier, dans le cas d'un cristal bidimensionnel invariant par translation selon Oz , la fonction de Bloch $\vec{H}_{\vec{k}}$ ne dépend que des coordonnées transverses x et y :

$$\vec{\mathcal{H}}_\omega(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{H}_{\vec{k}}(x, y)$$

En injectant l'expression ci-dessus dans l'équation des ondes (1), nous trouvons que la fonction de Bloch vérifie elle aussi une équation aux valeurs propres [3] [4] :

$$\hat{A}_{\vec{k}} \vec{H}_{\vec{k}} = \left(\vec{\nabla} + i\vec{k} \right) \times \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\vec{\nabla} + i\vec{k} \right) \times \vec{H}_{\vec{k}} \right] = (\omega/c)^2 \vec{H}_{\vec{k}} \quad (2)$$

L'opérateur $\hat{A}_{\vec{k}}$ dépend de \vec{k} , aussi est-il naturel de se fixer le vecteur d'onde. La résolution de l'équation aux valeurs propres ci-dessus fournit alors un jeu fonctions de Bloch $\vec{H}_{\vec{k},n}$ et de fréquences propres $\omega_n(\vec{k})$ associées, n désignant ici l'indice de mode. Ces fréquences propres forment un ensemble discret et les plus intéressantes sont celles qui correspondent aux modes guidés (c'est-à-dire pour lesquels l'énergie est concentrée dans le coeur) qui sont en nombre fini.

Inversement, à fréquence ω fixée, il existe un jeu de vecteurs d'onde $\vec{k}_n(\omega)$ et de fonctions de Bloch $\vec{H}_{\vec{k}_n(\omega),n}$ correspondantes. Etudiant la propagation d'ondes le long d'une fibre, nous nous limitons à des vecteurs d'onde colinéaires à l'axe de la fibre : $\vec{k} = \beta \vec{u}_z$. La solution générale de l'équation des ondes (1) est alors une combinaison linéaire de modes propres :

$$\vec{\mathcal{H}}_\omega(\vec{r}) = \sum_n \alpha_n \vec{H}_{\beta_n(\omega),n}(x, y) e^{i\beta_n(\omega)z} \quad (3)$$

Pour illustrer cette discussion graphiquement, considérons la figure 1. Cette figure représente, pour les deux premiers modes ($n = 1$ et $n = 3$) d'une fibre à saut d'indice de rayon de coeur a , le rapport de la constante de propagation β à la constante de propagation k_0 dans le vide en fonction de la fréquence normalisée $V = k_0 a \sqrt{n_s^2 - n_a^2}$. Cette figure est le résultat d'une simulation numérique avec MPB ; elle met notamment clairement en évidence la fréquence de coupure à 2.405 du second mode. Sur ce graphique, il est intéressant de considérer le lieu des points $yx = \text{Cte}$, puisque la quantité yx s'avère proportionnelle à la constante de propagation :

$$yx = \frac{\beta}{k_0} V = \beta a \sqrt{n_s^2 - n_a^2} \propto \beta$$

À constante de propagation donnée, nous voyons graphiquement qu'il existe un ou plusieurs points d'intersection de l'hyperbole caractérisée par β avec les courbes de dispersion. L'abscisse

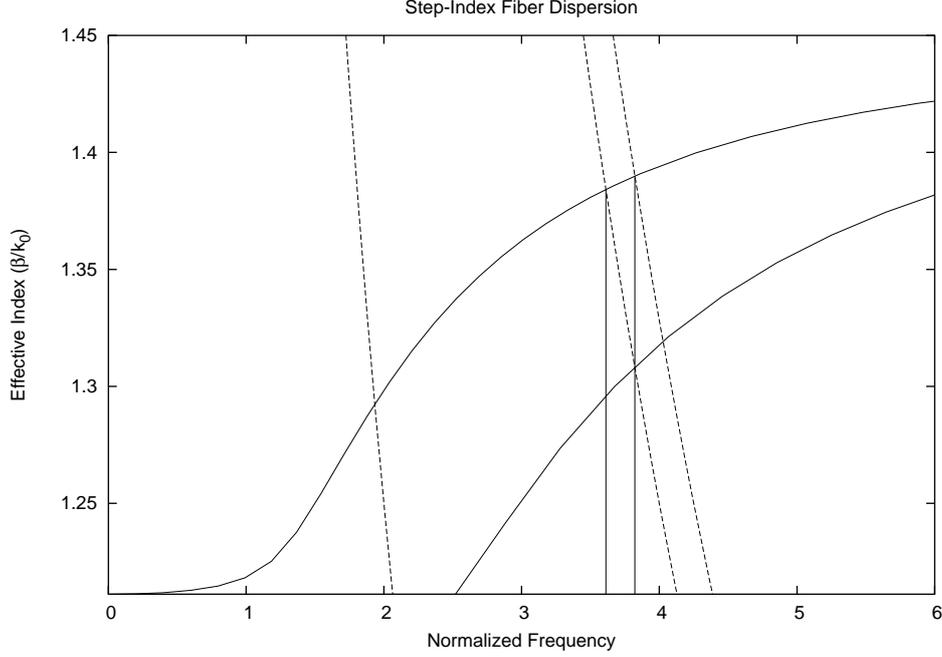


FIG. 1 – Relation de dispersion d’une fibre à saut d’indice

du n -ième point d’intersection est tout simplement la n -ième fréquence propre de l’équation aux valeurs propres (2). Nous vérifions au passage que cette fréquence croît en même temps que l’ordre n du mode auquel elle correspond augmente. Cela assure que les modes retournés par MPB sont bien classés selon l’usage.

Inversement, à fréquence ω déterminée, donc à fréquence normalisée V donnée, nous voyons qu’il existe un ou plusieurs points d’intersection des droites $x = V$ avec les courbes possibles. Ces points de d’intersection déterminent chacun indirectement une constante de propagation $\beta_n(\omega)$.

2.2 Structure hilbertienne

L’espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{C}^3)$ des fonctions dites de carré sommable, auquel appartiennent notamment les fonctions propres $\vec{\mathcal{H}}_\omega$, peut être muni d’une structure hilbertienne, moyennant l’introduction d’un produit scalaire. $\vec{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ représentant deux fonctions d’ondes (*i.e.* deux éléments de cet espace), nous définissons leur produit scalaire par :

$$\langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle = \int \vec{\mathcal{A}}^*(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) dx dy$$

l’intégration portant, dans le cas d’une fibre photonique, sur la surface transverse.

Au sens de ce produit scalaire, l’opérateur $\hat{\Theta}$ introduit précédemment est hermitien, c’est-à-dire que :

$$\langle \vec{\mathcal{A}}, \hat{\Theta} \vec{\mathcal{B}} \rangle = \langle \hat{\Theta} \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle$$

Pour s’en convaincre, il suffit d’appliquer l’égalité : $\text{div } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u}$ pour effectuer deux intégrations par partie successives [4] [10]. La divergence étant d’intégrale nulle pour des champs évanescents dans la gaine (ce qui est le cas des fonctions d’onde) et le tenseur diélectrique

étant supposé hermitien, il vient :

$$\int \vec{A}^* \cdot \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \times \vec{B} \right] dx dy = \int \frac{1}{\varepsilon} \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}^* \right] \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} \right] dx dy = \int \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\varepsilon^*} \vec{\nabla} \times \vec{A}^* \right] \cdot \vec{B} dx dy$$

Il s'en suit que les fonctions propres de l'équation des ondes (1) peuvent être choisies orthogonales entre elles et la décomposition (3) s'interprète alors comme une décomposition sur une base hilbertienne.

Remarque. L'hermiticité de $\hat{\Theta}$ justifie le choix du champ magnétique de préférence au champ électrique pour l'étude du problème : en effet, l'équation vérifiée par le champ électrique met en jeu un opérateur non hermitien en général (en raison de la place de ε).

2.3 Principe variationnel

Le formalisme ci-dessus s'apparente à celui de la mécanique quantique, et il est intéressant de poursuivre l'analogie jusqu'à la formulation d'un principe variationnel, pendant de la méthode variationnelle en mécanique quantique. Ce principe est fondamental en théorie des cristaux photoniques à deux égards : parce que le calcul numérique des modes propres y fait directement appel d'une part [3] [4], parce qu'il permet d'expliquer qualitativement la répartition de l'énergie des modes d'autre part.

Ce principe s'énonce comme suit [4]. Le mode fondamental minimise la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E_f(\vec{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{\mathcal{H}}, \hat{\Theta} \vec{\mathcal{H}} \rangle}{\langle \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}} \rangle}$$

Le mode immédiatement supérieur minimise cette même fonctionnelle dans le sous-espace orthogonal au mode fondamental, et ainsi de suite. En notant \vec{D} le déplacement électrique et en s'inspirant du calcul effectué pour montrer l'hermiticité de l'opérateur $\hat{\Theta}$, nous vérifions que :

$$E_f(\vec{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2\langle \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}} \rangle} \int \frac{1}{\varepsilon} |\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}}|^2 dx dy = \frac{1}{2\langle \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}} \rangle} \int \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\omega}{c} \vec{D} \right|^2 dx dy$$

Nous voyons sur cette expression qu'un mode harmonique, pour minimiser cette fonctionnelle, concentre son champ de déplacement dans les régions de forte constante diélectrique ε , et ce, d'autant plus que sa fréquence ω est élevée [4]. Nous nous servirons par la suite de ce critère pour interpréter les résultats numériques obtenus.

3 Effet Kerr optique

3.1 Tenseur des susceptibilités

Nous introduisons dans cette partie l'effet Kerr optique, effet non-linéaire que nous cherchons à prendre en compte, et auquel nous nous limiterons, pour l'étude de la propagation d'une impulsion dans une fibre photonique.

Lorsqu'un milieu diélectrique est soumis à un champ électrique \vec{E} , les charges liées s'y déplacent à l'échelle atomique. Il en résulte un moment dipolaire par unité de volume, ou polarisation \vec{P} . Il est d'usage d'exprimer les composantes P_i de la polarisation sous la forme d'un développement en puissances de E_j , composantes du champ exciteur [28] :

$$P_i = \varepsilon_0 \left[\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \mathcal{O}(E^4) \right] \quad (4)$$

Dans la relation ci-dessus, $\chi^{(n)}$ représente un tenseur de rang $n + 1$, dit tenseur des susceptibilités et chaque terme est petit devant celui qui le précède. Noter l'usage de la convention d'Einstein (sommation implicite sur les indices répétés). Par la suite, nous prendrons en compte la dépendance fréquentielle du tenseur $\chi^{(1)}$ mais négligerons celle du tenseur $\chi^{(3)}$.

Pour une force de champ faible (inférieure à 10^6 V/m), il est possible de rendre compte des phénomènes physiques en tronquant le développement à son premier terme ; la polarisation dépend alors linéairement du champ excitateur : c'est le domaine de l'optique linéaire. Pour une force de champ intense, l'influence des termes d'ordre supérieur cesse d'être négligeable ; la polarisation totale peut alors s'écrire comme somme d'une partie linéaire et d'une partie non-linéaire : c'est le domaine de l'optique non-linéaire.

Dans les milieux isotropes, notamment dans les solides amorphes et en particulier dans la silice (SiO_2 est une molécule centro-symétrique), $\chi^{(3)}$ est le tenseur non-linéaire d'ordre le plus bas non nul. Parmi les 4^3 composantes qu'il comporte, seules 21 sont non nulles, en raison de l'isotropie du matériau. Concernant les composantes non nulles, on montre en outre que les trois composantes indicées $kkkk$ sont égales, et qu'il en va de même pour les six composantes indicées $kkll$, pour les six composantes indicées $klkl$ et pour les six composantes indicées $kllk$, avec de plus la relation [27] :

$$\chi_{kkkk}^{(3)} = \chi_{kkll}^{(3)} + \chi_{klkl}^{(3)} + \chi_{kllk}^{(3)}$$

L'expression (4) n'étant pas linéaire, nous ne représentons pas un champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ par la grandeur complexe $\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$ mais par la demi-somme de cette grandeur et de son complexe conjugué, lorsqu'il s'agit de calculer une polarisation non-linéaire, ce que nous notons :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t} + (\text{c.c.})$$

De façon générale, le calcul de la polarisation non-linéaire associée à un champ de fréquence ω fait apparaître un terme à la fréquence fondamentale ω , mais également un terme harmonique à la fréquence 3ω . Nous admettons qu'il est possible de ne pas tenir compte de ce terme parasite dans les développements qui suivront [6]. Dans ces conditions, l'amplitude complexe de la polarisation non-linéaire (affectée d'un prime) peut s'écrire de la façon suivante, composante par composante :

$$P'_{\omega i} = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{ijkl}^{(3)} E_{\omega j} E_{\omega k}^* E_{\omega l}$$

3.2 Coefficient de Kerr

Dans le cas d'une polarisation rectiligne, par exemple :

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} E_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} \vec{u}_x + (\text{c.c.})$$

le champ de déplacement admet une expression relativement simple :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left[1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E_\omega|^2 \right] \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Il est alors d'usage de faire apparaître l'indice du milieu sous la forme :

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2 |E_\omega|^2$$

Nous voyons sur cette expression que l'indice de réfraction dépend du carré du champ électrique par le biais du coefficient de Kerr n_2 défini par :

$$2n_0 n_2 = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)}$$

et estimé expérimentalement à $n_2 = 2.3 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2/\text{V}^2$ pour la silice [6] : c'est l'effet Kerr. La valeur du terme perturbatif $n_2|E_\omega|^2$ est faible devant n_0 : seuls des champs intenses provoqueront des effets importants.

En pratique, le coefficient de Kerr est exprimé dans une autre unité. En effet, $|E_\omega|^2$ est proportionnel à la puissance lumineuse, ce qui permet de redéfinir le coefficient n_2 . En effet, la densité moyenne d'énergie électromagnétique est peu différente de :

$$\langle w_e \rangle \simeq \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_0^2 |E_\omega|^2$$

La puissance P_0 traversant la section droite de la fibre est donc reliée à la vitesse de groupe v_g associée au transport de l'énergie par la relation [31] :

$$P_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 v_g E_0^2 S_0 n_0^2$$

Dans l'expression ci-dessus, E_0 représente la valeur crête de $|E_\omega|$ et S_0 désigne classiquement la section efficace de la fibre ; cette dernière est définie par le rapport de l'intégrale sur la section transverse de $|E_\omega|^2$ à la valeur crête E_0^2 . D'où l'introduction d'un nouveau coefficient de Kerr :

$$n'_2 = \frac{2n_2}{\varepsilon_0 n_0^2 v_g}$$

de l'ordre de $10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$. Nous trouvons dans [6] la valeur $n'_2 = 3.2 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$ que nous utiliserons par la suite. Par souci de clarté, nous distinguerons les coefficients n_2 et n'_2 .

4 Fibre photonique à coeur plein et fibre à saut d'indice

4.1 Description d'une fibre photonique à coeur plein

Dans une fibre photonique (PCF) à coeur plein, des canaux microscopiques d'air d'axe Oz sont agencés périodiquement de telle façon qu'une coupe transversale mette en évidence des trous disposés selon un réseau triangulaire. Un canal est supprimé de manière à former un coeur d'indice local supérieur à l'indice effectif de la région qui l'entoure, autrement dit, la gaine.

Nous noterons classiquement Λ l'interstice entre les trous et d le diamètre des trous. Λ est de l'ordre $2.3 \mu\text{m}$ et le diamètre des trous est tel que le rapport d/Λ varie communément entre 0.1 et 0.9 [14]. Le diamètre de coeur $2\Lambda - d$ varie donc entre $2.53 \mu\text{m}$ et $4.37 \mu\text{m}$. Ce diamètre est donc deux à trois fois plus petit que celui d'une fibre monomode standard, de l'ordre de $9 \mu\text{m}$. Notre étude porte principalement sur une fibre caractérisée par $\Lambda \simeq 3 \mu\text{m}$ et $d/\Lambda \simeq 0.75$ (fibre russe). Cette dernière valeur peut être considérée comme une valeur importante [14].

Les équations de Maxwell étant invariantes par changement d'échelle, toutes les grandeurs que nous sommes amené à considérer sont normalisées. Les fréquences sont rapportées à la quantité c/a où c désigne la célérité de la lumière dans le vide et a représente une longueur caractéristique du problème envisagé, par exemple l'interstice entre les trous. Les vecteurs d'ondes sont quant à eux rapportés à la quantité $2\pi/a$. Ces conventions sont celles adoptées dans MPB. Nous noterons ces grandeurs respectivement ν et κ :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \frac{a}{c} = \frac{a}{\lambda} \quad \kappa = \frac{\beta a}{2\pi}$$

4.2 Indice effectif de gaine

Dans le cas d'une fibre à saut d'indice standard, l'ensemble des constantes de propagation admissibles (celles correspondant à des modes guidés) est borné inférieurement par $k_0 n_a$ et supérieurement par $k_0 n_s$. La borne inférieure s'identifie à la constante de propagation d'une onde plane dans un milieu d'indice n_a , indice de gaine; la borne supérieure s'identifie à la constante de propagation d'une onde plane dans un milieu d'indice n_s , indice de coeur.

Par analogie avec une fibre à saut d'indice, il est possible de définir l'indice effectif de gaine d'une PCF à coeur plein. Une telle fibre peut être vue comme un cristal photonique bidimensionnel présentant un défaut (suppression d'un canal d'air), ce qui délimite un coeur entouré d'une gaine. D'où l'idée de définir l'indice effectif de gaine à partir de la constante de propagation d'une onde se propageant selon Oz dans un milieu dont la structure est identique à celle de la gaine, autrement dit dans un cristal photonique sans défaut [21]. En pratique, il existe autant de vecteurs d'onde candidats que le cristal admet de modes : nous choisirons la constante de propagation associée au mode fondamental et définirons l'indice de gaine comme le rapport de cette constante à la constante de propagation dans le vide k_0 .

Un cristal photonique, dont la structure rappelle celle d'un réseau, est par nature hautement dispersif aux longueurs d'onde micrométriques. Par conséquent, l'indice de gaine dépend fortement de la fréquence, comme nous pouvons le vérifier sur la figure 2. Il est possible, par un raisonnement physique qualitatif, de retrouver les valeurs limites de l'indice de gaine à haute et basse fréquence :

À haute fréquence, la longueur d'onde λ est petite devant l'interstice Λ , grandeur caractéristique de la géométrie de la fibre. Comme nous l'avons vu avec le principe variationnel, le champ de déplacement est alors hautement confiné dans la région de constante diélectrique la plus élevée (soit ε_s), où il voit un milieu approximativement uniforme (puisque $\lambda \ll \Lambda$) d'indice égal à $\sqrt{\varepsilon_s}$. De fait, la constante de propagation en haute fréquence tend vers celle d'une onde plane se propageant dans un milieu d'indice $\sqrt{\varepsilon_s}$, ce que nous vérifions sur le graphique.

À basse fréquence, la longueur d'onde λ est au contraire grande devant l'interstice Λ . Les variations d'indice sont alors nivelées à l'échelle de la longueur d'onde et l'onde voit un milieu approximativement continu. Comme expliqué dans [16], la constante diélectrique d'un tel milieu peut être approximée par :

$$\varepsilon = f_a \varepsilon_a + f_s \varepsilon_s$$

où f_a et f_s représentent respectivement les fractions de remplissage de l'air et de la silice données par $f_a = (4\pi/3)(d/2\Lambda)^2 = (\pi/3)(d/\Lambda)^2$ et $f_s = 1 - f_a$ [15]. On en déduit $f_a \simeq 0.589$, $f_s \simeq 0.410$ et $\varepsilon \simeq 1.453$, ce qui correspond à un indice moyen de $\sqrt{\varepsilon} \simeq 1.205$. Cette dernière valeur est en très bonne concordance avec la valeur limite lue sur le graphique.

4.3 Comportement monomode, comportement multimode

Comme précisé en introduction, le mécanisme de guidage de la lumière dans une PCF à coeur plein peut être comparé au phénomène de réflexion interne totale à l'interface coeur-gaine d'une fibre à saut d'indice. Ceci tient au fait que l'indice effectif $n_{\text{eff}} = \beta/k_0$ des modes guidés est constamment compris entre l'indice de coeur et l'indice (effectif) de gaine [14].

Si l'indice de coeur peut être considéré en première approximation comme indépendant de la longueur d'onde, l'indice de gaine en dépend au contraire fortement comme cela vient d'être évoqué. Ce fait capital confère des propriétés particulières aux fibres photoniques, propriétés que ne possèdent pas les fibres standard. En effet, alors que le nombre de modes guidés augmente avec la fréquence pour une fibre à saut d'indice standard, le nombre de modes guidés pour une PCF à coeur plein reste fini puisque la différence d'indice coeur-gaine diminue lorsque la fréquence

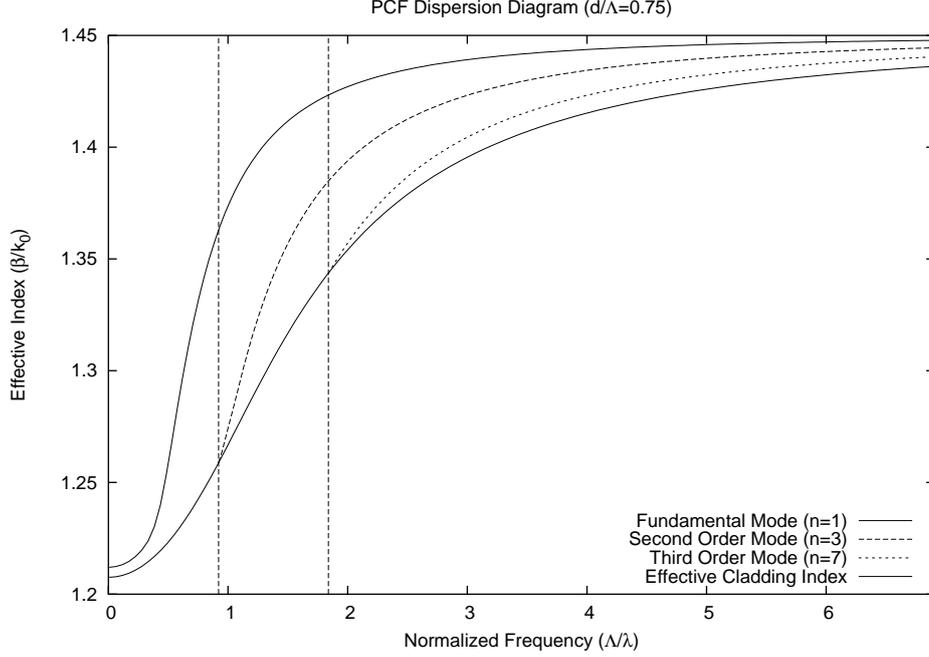


FIG. 2 – Relation de dispersion d’une PCF à coeur plein caractérisée par $d/\Lambda = 0.75$.

augmente [14] [19] (à comparer au fait qu’une fibre monomode s’obtient comme limite d’une fibre multimode lorsque le saut d’indice tend vers zéro). C’est là une différence essentielle avec les fibres standard, pour lesquelles les modes guidés sont seulement en nombre dénombrable lorsque la fréquence augmente.

La figure 2 représente l’évolution de l’indice effectif β/k_0 en fonction de la fréquence normalisée, pour la fibre modélisée. Outre le mode fondamental caractérisé par une fréquence de coupure nulle, nous notons l’existence d’au moins deux autres modes [14], de fréquences (normalisées) de coupure respectives 0.921 et 1.839. En particulier, à $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, la fibre russe est bimode.

Comme le montre la figure 3, les fréquences de coupure sont déplacées vers les hautes fréquences lorsque le rapport d/Λ diminue. Il peut notamment n’y avoir qu’un seul mode guidé pour un rapport d/Λ suffisamment faible. On trouve dans la littérature [14] [19] une valeur critique d^*/Λ de l’ordre de 0.45. Cette valeur critique ne dépendant pas du diamètre de coeur, il est possible de concevoir des PCF monomodes quel que soit le diamètre de coeur, ce qui constitue une différence notable avec les fibres monomodes standard.

4.4 Lignes de force du champ

Un cristal photonique en général et une fibre photonique en particulier présentent une structure périodique invariante par un certain nombre d’isométries. En conséquence, les modes électromagnétiques que ces structures admettent possèdent des propriétés d’invariance très particulières. Une fibre construite sur un réseau triangulaire est par exemple invariante par réflexion par rapport au plan Oxz , moyennant un choix convenable des axes. Posant :

$$\hat{M}_y : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

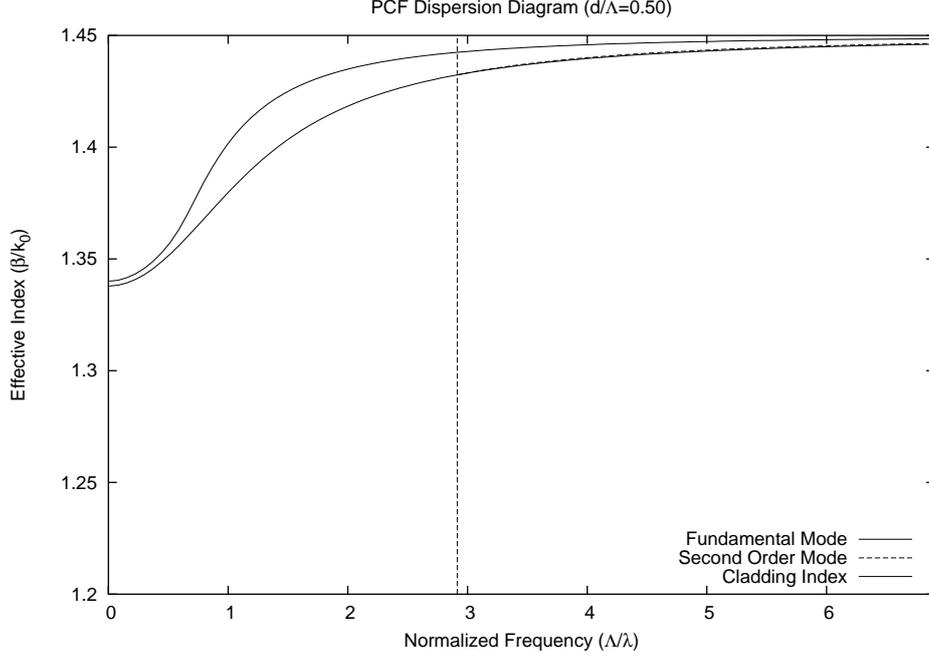


FIG. 3 – Relation de dispersion d’une PCF à coeur plein caractérisée par $d/\Lambda = 0.50$.

il est possible de montrer que les fonctions propres $\vec{\mathcal{H}}_\omega$ de l’opérateur $\hat{\Theta}$ peuvent être choisies de façon à vérifier [4] :

$$[\hat{O}_y \vec{\mathcal{H}}_\omega](\vec{r}) = \hat{M}_y [\vec{\mathcal{H}}_\omega(\hat{M}_y \vec{r})] = \pm \vec{\mathcal{H}}_\omega(\vec{r})$$

Autrement dit, les fonctions propres $\vec{\mathcal{H}}_\omega$ de l’opérateur $\hat{\Theta}$ choisies sont également fonctions propres de l’opérateur \hat{O}_y avec $\eta = \pm 1$ comme valeur propre associée. Plus généralement, à toute isométrie laissant la structure invariante, il est possible d’associer un opérateur analogue à \hat{O}_y qui commute avec $\hat{\Theta}$ et donc possède des fonctions propres communes avec $\hat{\Theta}$. Dans le cas d’une invariance par réflexion, les modes électromagnétiques peuvent, être classifiés en deux catégories : pairs et impairs. En effet, le champ $\vec{\mathcal{E}}_\omega$ associé au champ $\vec{\mathcal{H}}_\omega$ est également fonction propre de \hat{O}_y ; sont alors dits impairs les modes correspondant à :

$$[\hat{O}_y \vec{\mathcal{H}}_\omega](\vec{r}) = -\vec{\mathcal{H}}_\omega(\vec{r}) \quad [\hat{O}_y \vec{\mathcal{E}}_\omega](\vec{r}) = +\vec{\mathcal{E}}_\omega(\vec{r})$$

et sont dits pairs ceux correspondant à :

$$[\hat{O}_y \vec{\mathcal{H}}_\omega](\vec{r}) = +\vec{\mathcal{H}}_\omega(\vec{r}) \quad [\hat{O}_y \vec{\mathcal{E}}_\omega](\vec{r}) = -\vec{\mathcal{E}}_\omega(\vec{r})$$

La différence de signe tient à la nature intrinsèque des vecteurs champ électrique et champ magnétique : le premier est un vecteur alors que le second est un pseudo-vecteur.

La figure 4 représente les lignes de force du champ $\vec{\mathcal{E}}_\omega$ dans le cas des modes guidés admis par la fibre russe à $1.55 \mu\text{m}$ (plus exactement, cette figure met en évidence la trace sur le plan Oxy de ces lignes de force). Les deux figures supérieures correspondent au mode fondamental deux fois dégénéré. Les quatre figures inférieures correspondent au second mode quatre fois dégénéré. Il est immédiat de vérifier que les propriétés de symétrie énoncées plus haut (axe Oy vertical ascendant).

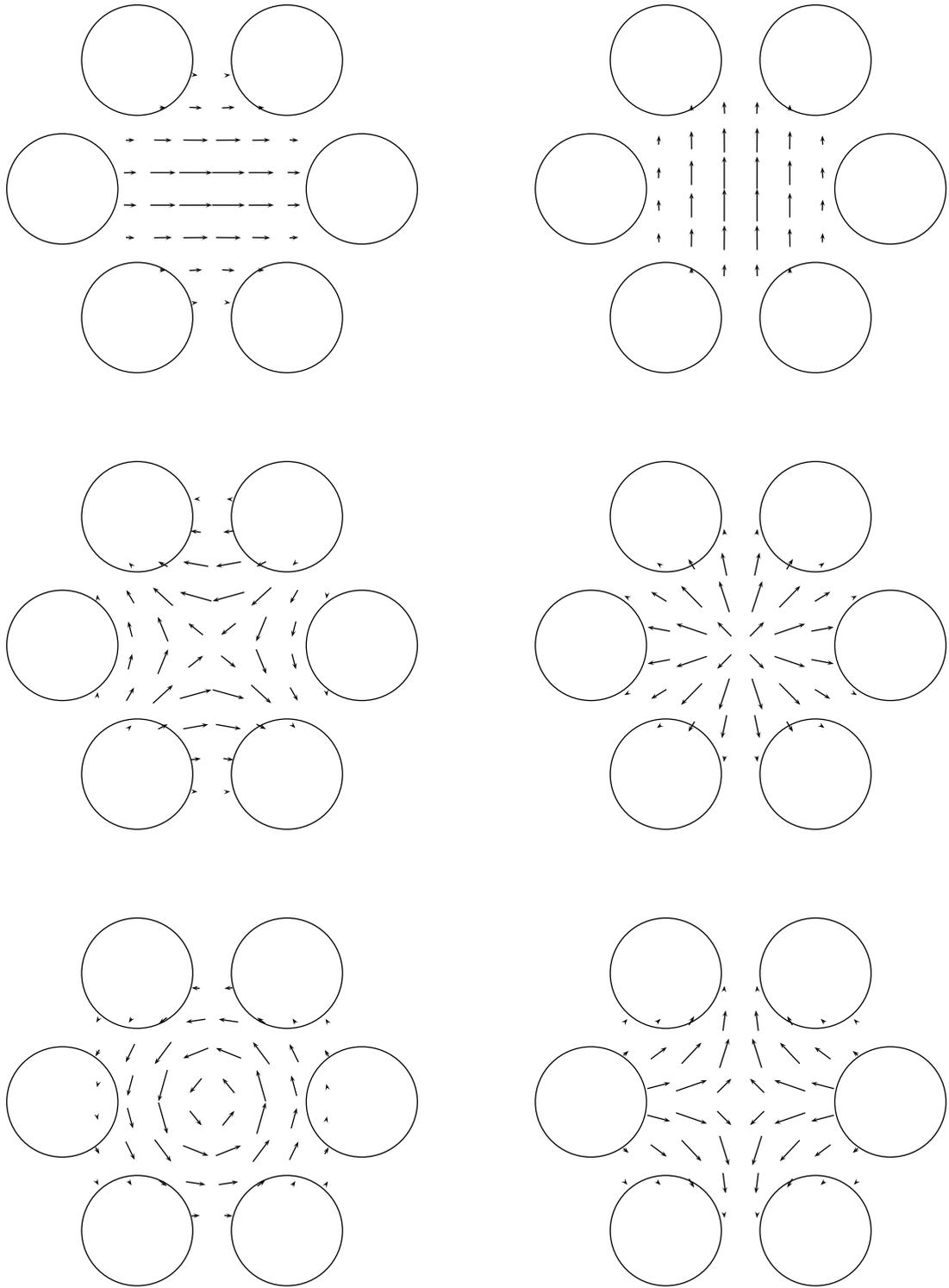


FIG. 4 – Lignes de force du champ $\vec{\mathcal{E}}_\omega$: modes pairs à gauche, modes impairs à droite.

5 Importance relative des effets dispersif et non-linéaire

5.1 Dispersion

Il y a dispersion lorsque la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique monochromatique dépend de sa fréquence. Dans ces conditions, un paquet d'ondes (ensemble d'ondes de fréquences voisines) se déforme lors de sa propagation. La dispersion intervient donc directement dans la propagation d'une impulsion lumineuse dans une fibre. Nous nous penchons donc à présent sur les paramètres habituels pour l'étude de la dispersion :

$$\beta'' = \frac{d^2\beta}{d\omega^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{c^2} \frac{d^2\kappa}{d\nu^2} \quad D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta'' = -\frac{\nu^2}{ac} \frac{d^2\kappa}{d\nu^2} = \frac{1}{ac} \frac{\nu^2}{(d\nu/d\kappa)} \frac{d}{d\nu} \frac{d\nu}{d\kappa}$$

La dispersion observée expérimentalement résulte d'au moins deux phénomènes physiques jouant à part égale. Le premier de ces phénomènes tient à la nature intrinsèque du matériau dans lequel la fibre est réalisée : c'est la dispersion matériau, dont la relation de Sellmeier rend compte ([6] p. 7). Le deuxième de ces phénomènes tient à la géométrie même du guide d'onde qui impose certaines conditions aux limites : c'est la dispersion du guide.

Or, il n'est pas facilement possible de prendre en compte la dispersion matériau avec MPB. En effet, les calculs sont effectués itérativement, le résultat d'une étape reposant sur celui de l'étape précédente. En conséquence, la géométrie et les constantes diélectriques mises en jeu doivent être spécifiées une fois pour toute en début de simulation, ce qui empêche d'intégrer facilement la dépendance fréquentielle de l'indice.

Aussi, le calcul des paramètres caractéristiques de la dispersion n'est pas directement possible avec MPB sans entraver le processus itératif. La méthode de calcul que nous proposons pour résoudre cette difficulté est inspirée d'un problème à la géométrie plus simple ; elle donne un résultat approximatif dans le cas d'une fibre à géométrie circulaire. Elle repose sur les considérations suivantes :

Soit un guide d'onde constitué par deux plans infinis parallèles au plan Oxz . Le champ électrique vérifie traditionnellement l'équation de Helmholtz : $\nabla^2 \vec{E} + \varepsilon(\omega)k_0^2 \vec{E} = \vec{0}$. Cherchant une solution particulière sous la forme d'une onde transverse électriquement : $\vec{E}(\vec{r}) = E_x(y)e^{i\beta z} \vec{u}_x$, nous obtenons : $E_x'' + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \beta^2]E_x = 0$. Des solutions guidées ne sont alors possibles entre les plans espacés de a que si : $\varepsilon(\omega)k_0^2 - \beta^2 = (p\pi/a)^2$, en raison des conditions aux limites, ce que nous pouvons réécrire :

$$\beta^2(\omega) = \left[\varepsilon(\omega_0)k_0^2 - \frac{p^2\pi^2}{a^2} \right] + \varepsilon(\omega)k_0^2 - \varepsilon(\omega_0)k_0^2 = \beta^2(\omega_0) + \varepsilon(\omega)k_0^2 - \varepsilon(\omega_0)k_0^2$$

Sur cette dernière relation de dispersion, nous voyons que le carré de la constante de propagation à la fréquence ω (grandeur à obtenir pour l'étude de la dispersion) se déduit du carré de la constante de propagation à la fréquence ω_0 (grandeur aisée à calculer avec MPB) par addition de $\varepsilon(\omega)k_0^2$ et soustraction de $\varepsilon(\omega_0)k_0^2$.

Par analogie, nous estimerons β'' et D dans le cas d'une fibre à partir d'une constante de propagation corrigée, la dépendance fréquentielle de l'indice étant elle-même prise en compte grâce à la relation de Sellmeier :

$$\beta_{\text{corr.}}^2(\omega) = \beta_{\text{calc.}}^2(\omega_0) + n_{\text{sell.}}^2(\omega)k_0^2 - n_{\text{sell.}}^2(\omega_0)k_0^2$$

La figure 5 montre l'évolution du paramètre β'' en fonction de la longueur d'onde pour le mode fondamental de fibres caractérisées par différents rapports d/Λ . Dans le cas de la fibre russe, ce paramètre vaut $\beta'' = -112.5 \text{ ps}^2/\text{km}$ à $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$. Cette valeur est près de six fois supérieure

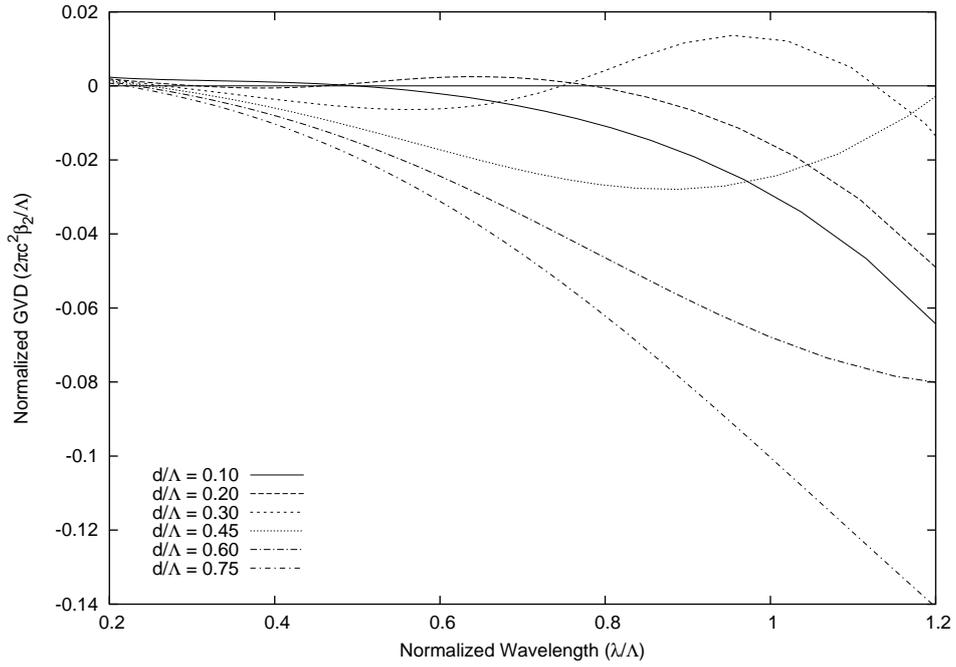


FIG. 5 – Évolution de β'' en fonction de la longueur d'onde.

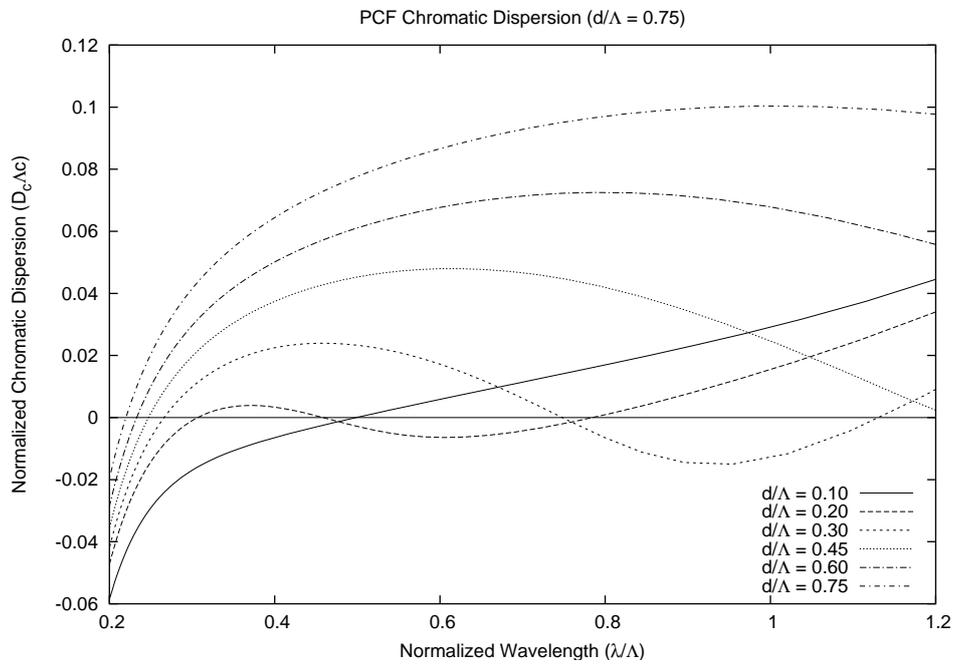


FIG. 6 – Évolution de D en fonction de la longueur d'onde.

à celle correspondant à une fibre standard, d'où une importance accrue de la dispersion ; en outre, cette grandeur est négative, d'où un régime de dispersion anormale : nous reviendrons ultérieurement sur ces deux points.

La figure 6 donne quant à elle l'évolution de la dispersion chromatique en fonction de la longueur d'onde, toujours pour le mode fondamental. Les courbes de dispersion obtenues sont tout à fait semblables à celles trouvées dans la littérature [14], ce qui semble valider la méthode de calcul utilisée. Lorsque le diamètre des trous est faible, la courbe de dispersion est proche de celle du matériau (trait plein) car les canaux d'air ont alors une influence minimale ; la dispersion devient de plus en plus importante lorsque le diamètre des trous augmente. La possibilité de concilier une dispersion positive avec le caractère monomode est évoquée dans [14] ; une manière de concevoir des fibres à dispersion plate est suggérée dans [15].

Remarque. Une manière de calculer directement et de manière exacte la vitesse de groupe est toutefois possible dans MPB, grâce au théorème de Hellman-Feynman [13]. En effet, puisque $\hat{A}_k \vec{H}_k = (\omega/c)^2 \vec{H}_k$, nous pouvons écrire, en se rappelant que \vec{H}_k est normé (condition de normalisation du champ magnétique adoptée dans MPB) :

$$\begin{aligned} \frac{2\omega}{c^2} \frac{d\omega}{dk} &= \left\langle \frac{d\vec{H}_k}{dk}, \hat{A}_k \vec{H}_k \right\rangle + \left\langle \vec{H}_k, \frac{d\hat{A}_k}{dk} \vec{H}_k \right\rangle + \left\langle \vec{H}_k, \hat{A}_k \frac{d\vec{H}_k}{dk} \right\rangle \\ &= (\omega/c)^2 \left[\left\langle \frac{d\vec{H}_k}{dk}, \vec{H}_k \right\rangle + \left\langle \vec{H}_k, \frac{d\vec{H}_k}{dk} \right\rangle \right] + \left\langle \vec{H}_k, \frac{d\hat{A}_k}{dk} \vec{H}_k \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{H}_k, \frac{d\hat{A}_k}{dk} \vec{H}_k \right\rangle \end{aligned}$$

À côté de la dispersion, l'atténuation est aussi un paramètre dont la connaissance est d'une grande importance en pratique. Toutefois, comme le tenseur diélectrique doit, dans MPB, être à symétrie hermitienne (ce qui signifie concrètement que l'indice correspondant à un tenseur d'ordre zéro doit être réel), il n'est pas directement possible de simuler numériquement l'atténuation, si ce n'est par une méthode perturbative.

5.2 Aire effective

Parallèlement à la dispersion, la non-linéarité contribue également à la déformation d'un paquet d'ondes lors de sa propagation, en raison par exemple de la modification locale de l'indice de réfraction par laquelle l'effet Kerr se manifeste. La non-linéarité s'impose donc comme objet d'étude, au même titre que la dispersion.

Il est possible d'apprécier l'importance des effets non-linéaires grâce à l'introduction de l'aire effective, explicitement [6] [12] [19] ou implicitement [29] [30] [31] présente dans de nombreux travaux. Nous définissons ici l'aire effective à partir de la composante transverse du champ de Bloch, ce que le symbole \perp vient rappeler (noter que l'aire effective est indépendante de la manière dont le champ de Bloch est normalisé) :

$$\mathcal{A}_{\text{eff}} = \frac{\left[\int |\vec{H}_{\vec{k},\perp}(x,y)|^2 dx dy \right]^2}{\int |\vec{H}_{\vec{k},\perp}(x,y)|^4 dx dy}$$

Du fait de l'importante différence d'indices coeur-gaine, le confinement du champ est plus fort dans une PCF à coeur plein que dans une fibre standard et l'aire effective est corrélativement plus faible [19] ; les effets non-linéaires sont donc d'autant plus importants que l'aire effective est plus faible. Nous trouvons dans la littérature [17] les valeurs suivantes pour une fibre caractérisée

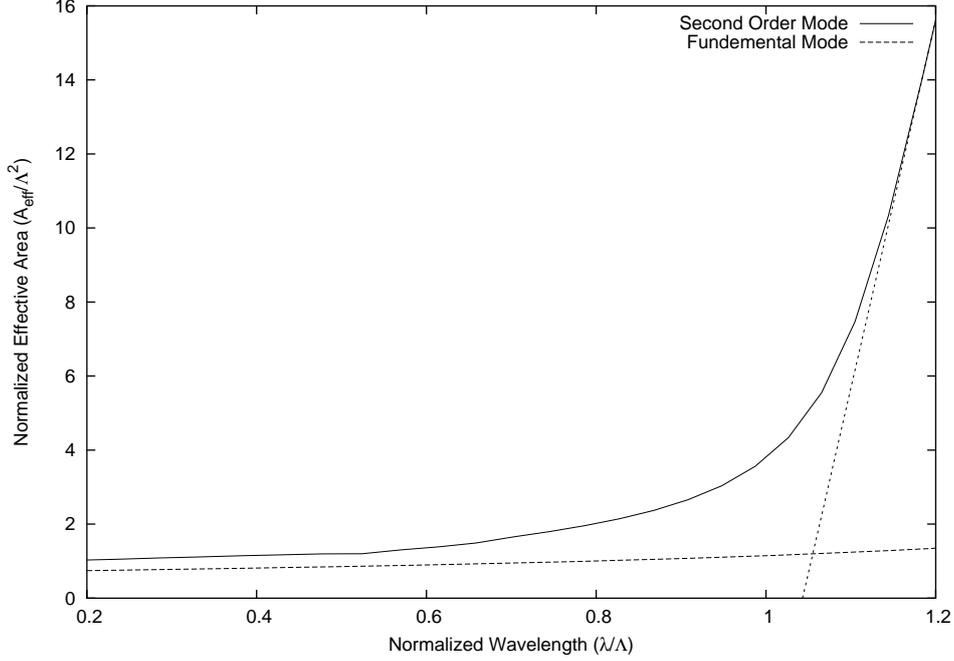


FIG. 7 – Évolution de l’aire effective en fonction de la longueur d’onde.

par $\Lambda = 2 \mu\text{m}$ et $d = 0.5 \mu\text{m}$: $\mathcal{A}_{\text{eff}} = 10.6 \mu\text{m}^2$ à 633 nm et $\mathcal{A}_{\text{eff}} = 12.5 \mu\text{m}^2$ à 828 nm ; à titre de comparaison avec l’expérience, une simulation numérique conduite avec MPB donne respectivement : $\mathcal{A}_{\text{eff}} = 10.0 \mu\text{m}^2$ et $\mathcal{A}_{\text{eff}} = 12.0 \mu\text{m}^2$.

La figure 7 montre l’évolution de l’aire effective en fonction de la longueur d’onde pour les deux premiers modes de la fibre modélisée. Comme nous nous y attendions, l’aire effective du mode fondamental reste faible, de l’ordre de $0.8\Lambda^2$, la surface du coeur étant de $\pi(2\Lambda - d)^2/4$. Nous voyons donc que l’énergie de ce mode semble bien hautement confinée dans le coeur.

En revanche, l’aire effective du second mode, qui reste légèrement supérieure à celle du mode fondamental tant que λ reste inférieure à une valeur critique λ_c , croît fortement dès que λ dépasse λ_c . En effet, pour une fréquence inférieure à la fréquence de coupure, donc pour une longueur d’onde supérieure à la longueur d’onde de coupure, le mode cesse d’être guidé et devient un mode radiatif ou mode à fuite [5]. L’amplitude du champ cesse dans ces conditions d’être évanescence dans la gaine ; l’énergie remplit toute la fibre et l’aire effective diverge. Si bien que la longueur d’onde critique mise en évidence précédemment peut en quelque sorte s’identifier à la longueur d’onde de coupure [19] ; et de fait, les valeurs numériques sont très proches : $\lambda_c = 1.043\Lambda$ pour la longueur d’onde critique contre 1.086Λ pour la longueur d’onde de coupure.

Remarque. Il s’avère que l’aire effective du mode fondamental diverge elle aussi aux très grandes longueurs d’onde. Cela tient au fait que l’énergie du mode fondamental emplie tout la fibre en très basse fréquence, comme prescrit par le principe variationnel. Numériquement, cela se traduit par une aire effective avoisinant l’aire de la super-maille utilisée pour le calcul.

En combinant le coefficient de Kerr n_2' et l’aire effective, il est possible de définir un coefficient de non-linéarité γ [6] [19] :

$$\gamma = \frac{n_2' k_0}{\mathcal{A}_{\text{eff}}}$$

Comme nous pouvons le vérifier, les effets non-linéaires sont d’autant plus importants que γ prend une valeur élevée, car ces effets croissent avec n_2' et décroissent avec \mathcal{A}_{eff} . Pour le mode

d/Λ	$2\pi c^2 \beta''/\Lambda$	L_D (m)	$\mathcal{A}_{\text{eff}}/\Lambda^2$	L_{NL} (m)
0.10	$-2.88 \cdot 10^{-4}$	2610	39.8	2760
0.20	$+1.03 \cdot 10^{-3}$	702	9.56	663
0.30	$-6.06 \cdot 10^{-3}$	124	2.52	174
0.40	$-1.06 \cdot 10^{-2}$	71	1.70	118
0.45	$-1.23 \cdot 10^{-2}$	61	1.50	104
0.60	$-1.67 \cdot 10^{-2}$	45	1.11	77
0.75	$-2.12 \cdot 10^{-2}$	35	0.85	59

TAB. 1 – Importance relative des effets dispersif et non-linéaire.

fondamental de la fibre russe, nous trouvons $\gamma = 1.7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ W}^{-1}$ à $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

5.3 Longueurs dispersive et non-linéaire

Nous disposons désormais des paramètres nécessaires pour estimer l'importance relative des effets dispersif et non-linéaire dans une PCF à coeur plein. Ces paramètres se prêtent à la définition de deux grandeurs caractéristiques, une longueur L_D caractéristique de la dispersion et une longueur L_{NL} caractéristique de la non-linéarité [6], lesquelles permettent, par comparaison avec la distance parcourue par une impulsion, de prévoir le comportement qualitatif de la fibre.

La déformation par dispersion est directement quantifiée par le paramètre β'' ; elle est en outre d'autant plus forte que le support fréquentiel de l'impulsion est étendu, autrement dit que sa durée T_0 est brève. La déformation par non-linéarité, quant à elle, est d'autant plus forte que les effets non-linéaires le sont, c'est-à-dire que γ est grand; elle est par ailleurs d'autant plus importante que la puissance lumineuse P_0 mise en jeu l'est (P_0 désigne plus exactement la puissance crête de l'impulsion). Dans l'un et l'autre cas, la déformation est d'autant plus sévère que la longueur de fibre parcourue est grande, d'où finalement la définition des grandeurs :

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta''|} \quad L_{\text{NL}} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

Le tableau 1 donne un aperçu des valeurs prises par L_D et L_{NL} pour différents rapports d/Λ . Les calculs sont effectués pour une impulsion de largeur $T_0 = 2 \text{ ps}$ et de puissance crête $P_0 = 1 \text{ W}$ et sur la base de $\Lambda = 3 \mu\text{m}$. Nous remarquons que les deux longueurs caractéristiques sont du même ordre de grandeur. En particulier, la condition nécessaire à la génération de solitons ($L_D = L_{\text{NL}}$) ne semble pas impossible à atteindre. Une comparaison avec une fibre standard montrerait que ces deux longueurs sont beaucoup plus faibles pour une PCF que pour une fibre à saut d'indice, d'où des effets, tant dispersifs que non-linéaires, beaucoup plus forts.

6 Propagation d'une impulsion quasi-monochromatique

6.1 Cadre de travail

Dans cette partie, nous nous servons des différents résultats obtenus jusqu'à présent pour modéliser la propagation d'une impulsion lumineuse quasi-monochromatique dans une PCF bimode, avec prise en compte de la dispersion et de la non-linéarité [6] [29] [30] [31].

Pour simplifier la modélisation, nous négligeons les variations de la constante diélectrique de façon à simplifier l'équation des ondes. Cette simplification est légitime dans la mesure où le champ électromagnétique support de l'information se propage dans le coeur de la fibre dont

l'indice peut bien être considéré comme constant. L'équation des ondes vérifiée par le champ électrique met alors en jeu elle aussi un opérateur hermitien, et tous les résultats obtenus pour le champ magnétique sont transposables au champ électrique. Nous choisissons désormais le champ \vec{E} pour paramétrer le problème, puisqu'il intervient directement dans l'expression de la polarisation non-linéaire. Nous emploierons les mêmes notations que pour le champ magnétique.

Lors de l'injection de lumière dans une fibre, l'énergie de l'onde excitatrice se répartit sur les différents modes que la fibre admet. À chaque mode excité correspond, comme nous l'avons vu, une constante de propagation $\beta_n(\omega)$ et un champ de Bloch $\vec{E}_{\beta_n(\omega),n}$. Une fibre dite monomode, qu'elle soit photonique ou à saut d'indice, admet en réalité deux modes de polarisations orthogonales, comme nous pouvons le vérifier sur la figure 4 dans le cas d'une PCF. Toutefois, un seul de ces modes peut être excité par une onde incidente convenablement polarisée. Dans ces conditions, la décomposition sur la base des modes se limite à un seul terme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \alpha_1 \vec{E}_{\beta_1(\omega),1}(x, y) e^{i(\beta_1(\omega)z - \omega t)} + (\text{c.c.})$$

Le cas d'une onde strictement monochromatique est inutilisable en pratique et dépourvu de sens physique. Aussi nous intéressons-nous désormais au cas d'une onde quasi-monochromatique. Par définition, une onde quasi-monochromatique est caractérisée par un spectre étroit, centré autour d'une fréquence ω_0 . Le produit de la largeur spectrale de l'impulsion $\Delta\omega$ par sa largeur temporelle T_0 étant de l'ordre de 2π , cette restriction impose en pratique une limite inférieure sur la durée de l'impulsion, ou, autrement dit, une limite supérieure sur le débit maximal admissible.

6.2 Equations de propagation

Dans le cas d'une fibre dite bimode, la décomposition sur la base des modes fait intervenir six termes :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^6 \alpha_n \vec{E}_{\beta_n(\omega),n}(x, y) e^{i(\beta_n(\omega)z - \omega t)} + (\text{c.c.})$$

En l'absence de biréfringence, les deux premiers termes (ceux qui correspondent au mode fondamental) sont caractérisés par la même constante de propagation, de même que les quatre termes suivants (ceux qui correspondent au second mode). En considérant les champs comme approximativement transverses électriquement, nous pouvons écrire :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{u}_x] \vec{u}_x + \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{u}_y] \vec{u}_y + (\text{c.c.})$$

et faire apparaître quatre termes, deux par mode et deux par polarisation :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[F_{1x}(x, y) e^{i\beta_1 z} \vec{u}_x + F_{2x}(x, y) e^{i\beta_2 z} \vec{u}_x + F_{1y}(x, y) e^{i\beta_1 z} \vec{u}_y + F_{2y}(x, y) e^{i\beta_2 z} \vec{u}_y \right] e^{-i\omega t} + (\text{c.c.})$$

soit de manière allégée :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[E_{1x} \vec{u}_x + E_{2x} \vec{u}_x + E_{1y} \vec{u}_y + E_{2y} \vec{u}_y \right] e^{-i\omega t} + (\text{c.c.})$$

Dans le cas d'une fibre caractérisée par $d/\Lambda = 0.75$ et pour une longueur d'onde opératoire de $\lambda/\Lambda = 0.52$ (fibre russe utilisée à $1.55 \mu\text{m}$), l'hypothèse de transversalité que nous effectuons ici est valable dans le cas du mode fondamental, mais est nettement plus contestable dans le cas du second mode.

La prise en compte des effets non-linéaires suppose le calcul de la polarisation non-linéaire. Dans le cas présent, elle peut se scinder en quatre termes :

$$\begin{aligned} P'_{1x} &= \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\mathbf{M}_{11} E_{1x} + \mathbf{M}_{13} E_{1y} \right] & P'_{1y} &= \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\mathbf{M}_{31} E_{1x} + \mathbf{M}_{33} E_{1y} \right] \\ P'_{2x} &= \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\mathbf{M}_{22} E_{2x} + \mathbf{M}_{24} E_{2y} \right] & P'_{2y} &= \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\mathbf{M}_{42} E_{2x} + \mathbf{M}_{44} E_{2y} \right] \end{aligned}$$

les coefficients \mathbf{M}_{ij} étant donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= |E_{1x}|^2 + 2|E_{2x}|^2 + E_{1x}E_{2x}^* + \frac{2}{3}|E_{1y}|^2 + \frac{2}{3}|E_{2y}|^2 \\ \mathbf{M}_{22} &= 2|E_{1x}|^2 + |E_{2x}|^2 + E_{2x}E_{1x}^* + \frac{2}{3}|E_{1y}|^2 + \frac{2}{3}|E_{2y}|^2 \\ \mathbf{M}_{13} &= \frac{2}{3}E_{1x}E_{2y}^* + \frac{2}{3}E_{2x}E_{2y}^* + \frac{1}{3}E_{1y}E_{1x}^* + \frac{1}{3}E_{1y}E_{2x}^* + \frac{1}{3}E_{2y}E_{1x}^* + \frac{1}{3}E_{2y}E_{2x}^* \\ \mathbf{M}_{24} &= \frac{2}{3}E_{1x}E_{1y}^* + \frac{2}{3}E_{2x}E_{1y}^* + \frac{1}{3}E_{1y}E_{1x}^* + \frac{1}{3}E_{1y}E_{2x}^* + \frac{1}{3}E_{2y}E_{1x}^* + \frac{1}{3}E_{2y}E_{2x}^* \end{aligned}$$

les autres coefficients se déduisant de ceux exprimés ci-dessus par symétrie. Soit sous forme matricielle :

$$\mathbf{P}' = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \mathbf{M} \mathbf{E}$$

Noter que ces expressions concordent avec deux cas particuliers envisagés dans [6] (p. 174 et p. 178).

En l'absence de non-linéarité, l'équation des ondes s'écrit :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} [1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega)] \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

En présence de non-linéarité, elle devient :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \left[1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \mathbf{M} \right] \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, il est possible de recourir à la théorie des perturbations au premier ordre [9] : la solution de l'équation non-linéaire peut être calculée en perturbant la solution de l'équation linéaire, qu'il faut donc résoudre dans un premier temps. À cet effet, il est commode de travailler dans le domaine de Fourier :

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 [1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)] \tilde{\mathbf{E}} = 0$$

Cherchant une solution de l'équation ci-dessus à variables séparées :

$$\tilde{\mathbf{E}}(\vec{r}, \omega) = e^{i\beta_0 z} \tilde{\mathbf{A}}(z, \omega) \mathbf{F}(x, y)$$

nous obtenons pour des raisons connues :

$$\begin{aligned} [\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon(\omega)] \mathbf{F} &= \beta^2 \mathbf{F} \\ 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial z} + (\beta^2 - \beta_0^2) \tilde{\mathbf{A}} &= 0 \end{aligned}$$

La première des deux équations ci-dessus n'est autre que l'équation vérifiée par le champ de Bloch dans le cas monochromatique; elle permet de déterminer la matrice des constantes de

propagation. La deuxième sert de point de départ à l'obtention d'une équation de Schrödinger non-linéaire.

Adoptant les notations suivantes pour les grandeurs perturbées :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}(\omega) &= \varepsilon(\omega) + \Delta\varepsilon \\ \bar{\beta}^2(\omega) &= \beta^2(\omega) + \Delta\beta^2 \\ \bar{\mathbf{F}} &= \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}\end{aligned}$$

nous obtenons deux contraintes au premier ordre :

$$\begin{aligned}[\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon]\mathbf{F} &= \beta^2\mathbf{F} \\ \Delta\varepsilon\mathbf{F} + [\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon]\Delta\mathbf{F} &= \beta^2\Delta\mathbf{F} + \Delta\beta^2\mathbf{F}\end{aligned}$$

Multipliant scalairement la première contrainte ci-dessus par $\Delta\mathbf{F}$, nous obtenons :

$$\langle \Delta\mathbf{F}, [\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon]\mathbf{F} \rangle = \langle \Delta\mathbf{F}, \beta^2\mathbf{F} \rangle$$

Or, l'opérateur $\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon$ est hermitien pour la même raison que $\hat{\Theta}$, soit :

$$\langle \mathbf{F}, [\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon]\Delta\mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}, \beta^2\Delta\mathbf{F} \rangle$$

Multipliant scalairement la deuxième contrainte par \mathbf{F} , nous obtenons :

$$\langle \mathbf{F}, \Delta\varepsilon\mathbf{F} \rangle + \langle \mathbf{F}, [\nabla_{\perp}^2 + \varepsilon]\Delta\mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}, \beta^2\Delta\mathbf{F} \rangle + \langle \mathbf{F}, \Delta\beta^2\mathbf{F} \rangle$$

soit après simplification :

$$\langle \mathbf{F}, \Delta\varepsilon\mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}, \Delta\beta^2\mathbf{F} \rangle$$

La matrice des constantes de propagation peut être explicitée terme par terme :

$$\Delta\beta_{ij}^2 = \frac{\langle \mathbf{F}_i, \Delta\varepsilon\mathbf{F}_j \rangle}{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle} = \frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)} \frac{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{M}_{ij}\mathbf{F}_j \rangle}{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}\Delta\beta_{ij}^2 &= 2n_0n_2 \sum_{k,\ell} \frac{\langle \mathbf{F}_i, E_k E_{\ell}^* \mathbf{F}_j \rangle}{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle} \\ &= 2n_0n_2 \sum_{k,\ell} \frac{\langle \mathbf{F}_i F_{\ell}, F_k \mathbf{F}_j \rangle}{\langle \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j \rangle} A_k A_{\ell}^* e^{i(\beta_{0,k} - \beta_{0,\ell})z}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\Delta\beta_{ij} = \frac{n_0 k_0}{n_{\text{eff},i}} n_2' \sum_{k,\ell} f_{i\ell k j} A_k A_{\ell}^* e^{i(\beta_k - \beta_{\ell})z}$$

D'où une des quatre équations de propagations couplées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{1x}}{\partial z} + \beta_1' \frac{\partial A_{1x}}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_1'' \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial t^2} &= i \frac{n_0 k_0}{n_{\text{eff},1}} n_2' \left[f_{1111} |A_{1x}|^2 + 2f_{1221} |A_{2x}|^2 \right. \\ &\quad \left. + f_{1121} A_{1x} A_{2x}^* e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} + \frac{2}{3} f_{1331} |A_{1y}|^2 + \frac{2}{3} f_{1441} |A_{2y}|^2 \right] A_{1x}\end{aligned}$$

Les intégrales de recouvrement non négligeables f_{ijkl} sont données page suivante.

f_{1111}	1.16724163354087
f_{1112}	1.1161842896228 + 0.339507716189093 <i>i</i>
f_{1122}	0.968960288808941 + 0.649609798250418 <i>i</i>
f_{1133}	0.363706129392415 + 0.648852055823591 <i>i</i>
f_{1134}	-0.129509869655674 - 0.696128409712822 <i>i</i>
f_{1144}	-0.132362909425897 + 0.740820374509144 <i>i</i>
f_{1211}	1.1161842896228 - 0.339507716189093 <i>i</i>
f_{1212}	1.16658264907895
f_{1222}	1.11641675222135 + 0.3396326654643 <i>i</i>
f_{1233}	0.540967007240262 + 0.518418855531937 <i>i</i>
f_{1234}	-0.329160164490513 - 0.633571482304587 <i>i</i>
f_{1244}	0.0894756416856644 + 0.752933550750565 <i>i</i>
f_{1313}	0.748193989459108
f_{1314}	-0.662443678685225 - 0.250661059476084 <i>i</i>
f_{1323}	0.720658926325846 + 0.219851584635596 <i>i</i>
f_{1324}	-0.565420130281668 - 0.436250220504842 <i>i</i>
f_{1413}	-0.662443678685225 + 0.250661059476084 <i>i</i>
f_{1414}	0.752593316418747
f_{1423}	-0.71243888305259 + 0.0468121661539985 <i>i</i>
f_{1424}	0.725418922506733 + 0.220640973666093 <i>i</i>
f_{2211}	0.968960288808941 - 0.649609798250418 <i>i</i>
f_{2212}	1.11641675222135 - 0.3396326654643 <i>i</i>
f_{2222}	1.16775139772837
f_{2233}	0.674295929758554 + 0.34099108028493 <i>i</i>
f_{2234}	-0.504009605863143 - 0.515077759842642 <i>i</i>
f_{2244}	0.307284750193136 + 0.700197014180147 <i>i</i>
f_{2313}	0.720658926325846 - 0.219851584635596 <i>i</i>
f_{2314}	-0.71243888305259 - 0.0468121661539985 <i>i</i>
f_{2323}	0.759648405517107
f_{2324}	-0.674196852408074 - 0.254539966282822 <i>i</i>
f_{2413}	-0.565420130281668 + 0.436250220504843 <i>i</i>
f_{2414}	0.725418922506733 - 0.220640973666093 <i>i</i>
f_{2423}	-0.674196852408073 + 0.254539966282822 <i>i</i>
f_{2424}	0.764656690261606
f_{3311}	0.363706129392414 - 0.648852055823591 <i>i</i>
f_{3312}	0.540967007240262 - 0.518418855531937 <i>i</i>
f_{3322}	0.674295929758554 - 0.34099108028493 <i>i</i>
f_{3333}	1.24217601286535
f_{3334}	-1.10307977535668 - 0.404351550115953 <i>i</i>
f_{3344}	0.867156583188896 + 0.754630494452018 <i>i</i>
f_{3411}	-0.129509869655674 + 0.696128409712822 <i>i</i>
f_{3412}	-0.329160164490513 + 0.633571482304587 <i>i</i>
f_{3422}	-0.504009605863143 + 0.515077759842642 <i>i</i>
f_{3433}	-1.10307977535668 + 0.404351550115953 <i>i</i>
f_{3434}	1.15343708603641
f_{3444}	-1.09327414481568 - 0.418955024656892 <i>i</i>
f_{4411}	-0.132362909425897 - 0.740820374509144 <i>i</i>
f_{4412}	0.0894756416856644 - 0.752933550750565 <i>i</i>
f_{4422}	0.307284750193136 - 0.700197014180147 <i>i</i>
f_{4433}	0.867156583188896 - 0.754630494452018 <i>i</i>
f_{4434}	-1.09327414481568 + 0.418955024656892 <i>i</i>
f_{4444}	1.24358624836397

FIG. 8 – Intégrales de recouvrement

7 Présentation et utilisation de MPB

7.1 Présentation de MPB

Le projet MPB (MIT Photonic-Bands), proposé sous licence GPL, est conçu pour tourner sur n'importe quel système dérivé d'Unix. Par souci d'efficacité et de performance, MPB fait appel à de nombreux composants auxiliaires auxquels il délègue des tâches spécialisées. L'installation de MPB suppose donc avant tout l'installation de ces divers composants qui sont tous disponibles librement.

Le moteur MPB est piloté au moyen de scripts Scheme. Scheme est un langage de programmation fonctionnelle, la programmation fonctionnelle différant à bien des égards de la programmation procédurale [11]. Scheme en soit n'est rien ; c'est l'environnement Guile qui est tout, puisque c'est cet environnement qui réalise l'interprétation des programmes, et sur lequel MPB repose. L'utilisation de MPB suppose donc l'écriture préalable d'un script spécifiant notamment la géométrie du problème, les vecteurs d'onde à considérer, le nombre de modes à prendre en compte. Ce script est ensuite passé en argument à MPB, qui se présente concrètement sous la forme d'une commande Unix. Les résultats de la simulation sont alors affichés en mode texte, ce qui signifie en particulier qu'aucun gestionnaire de fenêtres tel que 11 n'est nécessaire, mais cela signifie également que l'interaction avec le programme est des plus élémentaires.

7.2 Fonctionnement

Pour résoudre numériquement le problème aux valeurs propres énoncé plus haut, le champ de Bloch $H_{\vec{k}}(\vec{r}_{\perp})$, qui ne dépend que des coordonnées transverses, est décomposé sur une base d'ondes planes $e^{i\vec{g}\cdot\vec{r}_{\perp}}$, la décomposition étant tronquée à un nombre fini de termes pour discrétiser le problème. Le choix d'une base d'ondes planes de préférence à une autre base est motivé par la facilité d'exprimer, sur cette base, la contrainte de transversalité du champ magnétique (divergence nulle).

Lors du passage sur la machine, la surface transverse (x, y) d'extension spatiale infinie est également discrétisée en une grille de $N \times N$ points d'extension spatiale finie. Étant donnés des vecteurs de base \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , les points de cette grille accessibles peuvent s'écrire sous la forme $\vec{r}_{n,m} = n\vec{u}_1/N + m\vec{u}_2/N$. Nous voyons sur cette expression que les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 peuvent s'interpréter comme les vecteurs de base d'un réseau direct obtenu en pavant l'espace 2D à l'aide d'une super-maille qui s'identifie à la grille considérée. Il importe de bien différencier cette super-maille de la maille élémentaire du réseau triangulaire. La définition du réseau direct permet alors celle du réseau réciproque, encore appelé espace des vecteurs d'onde [8]. La dualité qui existe entre le réseau direct et le réseau réciproque amène à discrétiser de la même manière l'espace des vecteurs d'onde : étant donnés deux vecteurs de base \vec{g}_1 et \vec{g}_2 du réseau réciproque ($\vec{g}_i \cdot \vec{u}_j = 2\pi \Delta_{ij}$), les points accessibles sont choisis de la forme $\vec{g}_{p,q} = p\vec{g}_1 + q\vec{g}_2$.

Le champ de Bloch peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} H_{\vec{k}}(\vec{r}_{n,m}) &= \sum_{1 \leq p,q \leq N} \vec{\eta}_{p,q} e^{i\vec{g}_{p,q}\cdot\vec{r}_{n,m}} \\ &= \sum_{1 \leq p,q \leq N} \vec{\eta}_{p,q} e^{i\frac{2\pi}{N}np} e^{i\frac{2\pi}{N}mq} \end{aligned}$$

forme sur laquelle nous reconnaissons une transformée discrète de Fourier bidimensionnelle. Il est donc naturel de considérer exactement le même nombre de points dans l'espace direct que dans l'espace réciproque. De fait, augmenter la taille de la grille permet d'affiner la résolution fréquentielle. En pratique, $N = 256$.

7.3 Limitations

Comme toute méthode numérique, le procédé employé dans MPB a ses limitations :

Le mode fondamental d'une PCF à coeur plein est un mode double en ce sens qu'il existe en réalité deux modes fondamentaux, qui se distinguent par l'aspect des lignes de champ, mais dont la fréquence propre est identique, à constante de propagation égale. En pratique, la symétrie du maillage introduite par MPB rompt cette dégénérescence, ce qui se traduit par deux fréquences propres légèrement différentes (biréfringence numérique). Ces problèmes tendent à disparaître en augmentant la résolution fréquentielle.

Dans les conditions dites de faible guidage, le second mode par exemple est quatre fois dégénéré. Il est en général nécessaire, lorsqu'il y a dégénérescence, de calculer autant de bandes confondues qu'il y en a, ce qui porte ici à six le nombre de bandes à calculer : double mode fondamental et quadruple second mode (nous utilisons ici le terme de bande pour plus de clarté : un mode dégénéré n fois occulte n bandes confondues).

MPB permet uniquement l'étude d'une structure rigoureusement périodique. Il n'est donc pas possible d'étudier exactement une fibre photonique, mais seulement une approximation : la fibre correspond à une super-maille qui est utilisée pour paver l'espace tout entier, et c'est l'espace tout entier qui est étudié. Cette limitation semble mineure en pratique.

8 Conclusion

La recherche n'en est qu'à ses débuts dans le domaine des fibres photoniques. Pour autant, les résultats obtenus augurent de nombreuses applications potentielles dans le domaine des télécommunications. En particulier, la possibilité d'un comportement monomode à haute fréquence, les propriétés de dispersion et le fort confinement de la lumière dans le coeur semblent particulièrement prometteurs pour ce qui est de la propagation de solitons dans ces fibres. *Remerciements à James A. West et à Niels Asger Mortensen pour leur aide précieuse.*

Références

- [1] Peter Bienstman, The CAvity Modelling FRamework home page camfr.sourceforge.net/.
- [2] Steven G. Johnson and J. D. Joannopoulos, The MIT Photonic-Bands Package home page <http://ab-initio.mit.edu/mpb/>.
- [3] Steven G. Johnson and J. D. Joannopoulos, Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell's equations in a planewave basis, *Optics Express* 173, Vol. 8, No. 3, January 2001.
- [4] John D. Joannopoulos, Robert D. Meade, and Joshua N. Winn, *Photonic Crystals : Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, 1995.
- [5] Pierre-André Bélanger, *Les fibres optiques : supplément d'électromagnétisme appliqué*, Université Laval, Canada.
- [6] Govind P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 1989.
- [7] Simon Ramo, John R. Whinnery, and Theodore Van Duzer, *Fields and Waves in Communications Electronics*, John Wiley & Sons, Second Edition, Singapore, 1984.
- [8] C. Kittel, *Introduction à la physique de l'état solide*, Dunod, Paris, 1972.
- [9] Philip M. Morse and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953, chap. 9.
- [10] C. Vassallo, *Théorie des guides d'ondes électromagnétiques*, Eyrolles, Paris, 1985, chap. 6.

- [11] Pascal Gribomont, Elements de programmation en Scheme, Dunod, Paris, 2000.
- [12] Londergan J. Londergan, Binding and Scattering in Two Dimensional Systems : Applications to Quantum Wires, Waveguides and Photonic Crystals (LNP 60).
- [13] Steven G. Johnson, M Ibanescu, M. A. Skorobogatiy, O. Weisberg, J. D. Joannopoulos, and Y. Fink, Perturbation Theory for Maxwell's Equations with Shifting Material Boundaries, Physical Review E, Volume 65, 066611, June 2002.
- [14] J. Broeng, S. E. Barkou, A. Bjarklev, T. Sondergaard, and E. Knudsen, Review Paper : Crystal Fibre Technology, DOPS-NYT 2-2000.
- [15] A. Ferrando, E. Silvestre, and P. Andr'es, Designing the properties of dispersion-flattened photonic crystal fibers, Optics Express, Vol. 9, No. 13, December 2001.
- [16] D. E. Aspnes, Local-field effects and effective medium theory : A microscopic perspective, American Journal of Physics, Vol. 50, No. 8, 1982.
- [17] A. Peyrilloux, S. Février, J. Marcou, L. Berthelot, D. Pagnoux, and P. Sansonetti, Comparison between the finite element method, the localized function method and a novel equivalent averaged index method for modelling photonic crystal fibres, Journal of Optics A : Pure and Applied Optics, Vol. 4, pp. 257-262, 2002.
- [18] A. Bjarklev, J. Broeng, S. E. Barkou Libori, E. Knudsen, and H. R. Simonsen, Photonic Crystal Fiber Modelling and Applications, Fiber optics and optical communications, (060.2400) Fiber properties, 2000.
- [19] Niels Asger Mortensen, Effective Area of Photonic Crystal Fibers, Optics Express, Vol. 10, No. 7, pp. 341-348, April 2002.
- [20] T. A. Birks, D. Mogilevtsev, J. C. Knight, P. St. J. Russell, J. Broeng, P. J. Roberts, J. A. West, D. C. Allan, and J.C. Fajardo, The Analogy Between Photonic Crystal Fibres and Step Index Fibres, 114/FG4-1.
- [21] T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St. J. Russell, Endlessly single-mode photonic crystal fibers, Optics Letters, Vol. 22, No. 13, 1997.
- [22] Suresh Pereira and J. E. Sipe, Nonlinear Pulse Propagation in Birefringent Fiber Bragg Gratings, Optics Express 418, Vol. 3, No. 11, November 1998.
- [23] James A. West and D. C. Allan, Effect of Disorder on Photonic Band-Gap Fibers, L-5719-MAN.
- [24] S. Guenneau, A. Nicolet, F. Zolla, and S. Lasquelllec, Modeling of Photonic Crystal Optical Fibers With Finite Elements, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, March 2002.
- [25] Saitoh and Koshiba, Full-Vectorial Imaginary-Distance Beam Propagation Method, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 38, No. 7, July 2002.
- [26] R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, J. D. Joannopoulos, and O. L. Alerhand, Accurate theoretical analysis of photonic band-gap materials, Phys. Rev. B 48, No. 11, pp. 8434-8437, 1993. Erratum by S. G. Johnson, PRB 55, No. 23, pp. 15942, June 1997.
- [27] Max Schubert and Bernd Wihelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics, Wiley Series in Pure and Applied Optics, 1986.
- [28] N. Bloembergen, Nonlinear Optics, W. A. Benjamin, Reading, 1977, chap. 1.
- [29] Alan C. Newell and Jerome V. Moloney, Nonlinear Optics, Addison-Wesley, 1992.
- [30] Yuji Kodama and Akira Hasegawa, Nonlinear Pulse Propagation in a Monomode Dielectric Guide, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 23, No. 5, pp. 510-525, May 1987.
- [31] Akira Hasegawa, Optical Solitons in Fibers, Springer-Verlag, Second Enlarged Edition, 1989.